



## University of the Pacific Scholarly Commons

---

Euler Archive - All Works

Euler Archive

---

1732

# De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

---

### Recommended Citation

Euler, Leonhard, "De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta iungente" (1732). *Euler Archive - All Works*. 9.  
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/9>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact [mgibney@pacific.edu](mailto:mgibney@pacific.edu).

DE LINEA BREVISSIMA  
IN SUPERFICIE QUACVNQVE DVO QVAE-  
LIBET PVNCTA IVNGENTE.

*Auctore*

Leonh. Eulero.

I.

M. Nov.  
1728.  
Tab. VI.

**C**VIQVE notum est, et a multis tanquam a-  
xioma ponitur, lineam seu viam bre-  
vissimam a dato puncto ad aliud quodcun-  
que esse lineam rectam. Ex hoc facile in-  
telligitur, in superficie plana lineam breuissimam  
duo quaelibet puncta iungentem esse rectam, quae  
ab altero ad alterum ducitur. In superficie sphaeri-  
ca, in qua linea recta duci non potest, statuitur a  
Geometris viam breuissimam esse circulum maxi-  
mum, qui data duo puncta coniungit.

2. Quae autem in superficie quacunque siue  
convexa, siue concava, siue ex his mixta sit via bre-  
vissima, quae ex dato puncto ad aliud quodcunque  
ducitur, nondum est generaliter determinatum. Pro-  
posuit mihi hanc quaestionem Cel. Ioh. Bernoulli,  
significans se vniuersalem inuenisse aequationem, quae  
ad lineam breuissimam determinandam cuique su-  
perficie accommodari possit. Solui ego etiam hoc  
problema, solutionemque hac dissertatione expo-  
nere volui.

3. Me-

3. Mechanice hoc problema facillime soluitur ope fili, quod per data duo puncta ductum tenditur, quantum fieri potest, hoc enim filum in superficie proposita designabit viam breuissimam. Necessesse est autem, vt hoc filum vbique superficiem tangat, quemadmodum si superficies conuexa sit, in superficiebus quidem concavis non arcum curvae sed chordam repraesentabit. Hoc igitur in casu filum ita applicari debet, vel applicatum concipi, vt semper superficiem in parte conuexa tangat.

4. Hac vero constructione geometra contentus esse non potest, qui naturam huius lineae intimam perspicere desiderat, eamque, vt fieri solet, aequatione exponere. In mechanica autem constructione linea quaesita tantum aspectui exponitur, neque ex hoc natura eius potest perspicui. Propterea hic methodum sum traditurus, qua pro omnibus superficiebus, dummodo aequationibus exprimi possunt, linea breuissima determinari potest.

5. Ad hoc igitur opus est, vt superficierum naturae aequationibus includantur; quo tota operatio analytice possit absolui. Solent lineae curvae in eodem plano sitae exprimi aequationibus inter duas coordinatas, ex quibus cuiusque puncti situs secundum longitudinem et latitudinem definitur. In superficiebus autem tres considerandae sunt positionum relationes, cum puncti cuiuslibet in superficie locus secundum tres dimensiones debeat esse determinatus. Tribus igitur in aequationibus superficierum vti conuenit variabilibus; quarum vna locum  
pun-

puncti secundum longitudinem, altera secundum latitudinem et tertia secundum altitudinem determinat.

Fig. 1.

6. Concipiatur planum, quod in figura congruit cum plano chartae, et quod horizontale appellabimus, in eoque recta pro lubitu ducta AP, quae tanquam axis erit consideranda. Sit nunc M punctum cuiuspiam superficiei extra hoc planum situm, demittatur ex eo in planum horizontale perpendicularum MQ plano in Q occurrens, et ex Q in lineam seu axem AP ducatur perpendicularis QP. Perspicuum nunc est datis tribus lineis AP, PQ, et QM quantitate, situm puncti M fore determinatum.

7. Hae igitur tres lineae AP, PQ et QM nobis erunt indeterminatae, ex quibus cum constantibus aequatio pro superficie punctis M terminata conficitur. Vocabimus AP,  $t$  PQ,  $x$ , et QM,  $y$ , atque pro qualibet superficie, de qua quidquam quaeritur, oportet aequationem inter has indeterminatas inuestigare. Simili deinceps modo ex huiusmodi aequationibus proprietates eruentur, quo ex aequationibus curvarum earum proprietates deriuntur. Vti si superficies fuerit sphaerica, cuius centrum in A et radius  $=a$ , erit aequatio eius naturam continens  $aa=tt+xx+yy$ .

8. Quemadmodum porro in linea curua certum punctum definitur vel determinato valore alterutri indeterminatae assignando, vel alia quadam aequatione cum aequatione locali coniungenda. Sic in superficiebus, si quaedam trium indeterminatarum deter-

terminatur, vel alia aequatio cum aequatione superficiem definiente coniungitur; habebitur aequatio pro linea quadam in ea superficie sita, quae formatur intersectione datae superficiet et alius noua aequatione expressae. Punctum denique fixum in superficie constituetur, vel duabus indeterminatis determinandis, vel duabus nouis aequationibus adiungendis.

9. Quamobrem ad lineam breuissimaem in superficie quacunque, cuius cognita est aequatio, duendam aliam aequationem inuestigabo, quae cum illa iuncta definit in superficie ea lineam breuissimam quaesitam. Ex his deinde duabus aequationibus omnia, quae ad situm lineae breuissimae cognoscendum pertinent, elici poterunt. Proiectio scilicet in plano horizontali definitur aequatione, quae ex illis duabus prodit exterminata  $y$ . Proiectio in plano verticali horizontale in AP secantehabetur exterminanda  $x$ . Et proiectio in plano verticali et perpendiculari ad AP habetur eliminanda littera  $z$ .

10. Ad soluendum nunc hoc problema uti oportet *methodo maximorum et minimorum* prout ipsa quaestio postulat. Quaeritur autem in superficie data inter omnes lineas eosdem terminos habentes ea, quae est minima. Proprietas haec minimi non solum in integram lineam quaesitam competet, sed etiam in singulas eius particulas; ita ut duo elementa eius contigua designent intra suos terminos viam breuissimam. Ex hoc igitur facilius nascitur modus ad aequationem perueniendi.

Fig. 2.

11. Ad determinandam nunc positionem duorum elementorum viam intra suos terminos brevis-  
simam constituentium sequens praemitto lemma.  
Sint duo puncta fixa I et H et curua inter ea exten-  
sa IK. Quaerendum est in ea punctum M tale, vt  
via (ductis rectis GM et MH)  $GM + MH$  sit omnium,  
quae per alia puncta curuae IK duci possunt, minima.  
Notum est ex *methodo maximorum et minimorum* po-  
ni oportere, sumto  $m$  puncto proximo ipsi M,  
 $GM + MH = Gm + mH$ , ex hacque aequatione inueni-  
ri locum puncti M, per quod transiens via  $GM +$   
 $MH$  est minima.

12. Demissis ex punctis G, H, M, et  $m$  ad pla-  
num horizontale perpendiculis GE, HE, MP et  $mp$ ,  
producatur  $pP$  in C eique iungatur normalis AC in  
plano eodem horizontali sita, quae tanquam axis  
consideretur; ad hancque ducantur perpendiculares  
EB et FD. Ponamus BC et CD esse aequales, ta-  
les enim in sequentibus assumere licebit. Sint  $BC =$   
 $CD = a$ ;  $BE = b$ ;  $EG = c$ ;  $DF = f$ ;  $FH = g$ . Sit  
porro  $CP = x$  et  $PM = y$ , quae sunt coordinatae cur-  
vae IK. Erit igitur  $Cp = x + dx$  et  $pm = y + dy$ .

13. Ex his inuenietur  $GM = \sqrt{[a^2 + (x - b)^2 + (y - c)^2]}$ : est enim  $GM^2 = (PM - GE)^2 + (CP - BE)^2 + BC^2$ . Similiter habebitur  $HM = \sqrt{[a^2 + (f - x)^2 + (g - y)^2]}$ .  
Tota igitur via  $GM + MH$  erit  $= \sqrt{[a^2 + (x - b)^2 + (y - c)^2]} + \sqrt{[a^2 + (f - x)^2 + (g - y)^2]}$ , quae ergo quantitas  
debet naturam minimi habere. Variabiles eius quan-  
titates sunt  $x$  et  $y$ , a quibus punctum M quaesitum  
pendet. Differentietur igitur ista quantitas expri-  
mens

mens  $GM+MH$ , et, quod prouenit, ponatur  $=0$ .

Orieturque haec aequatio,  $\frac{(x-b)dx + (y-c)dy}{\sqrt{a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2}} - \frac{(f-x)dx + (g-y)dy}{\sqrt{a^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2}}$ . Ex quo locus puncti  $M$  determinabitur.

14. Quia curua  $IK$  ponitur data, dabitur aequatio inter eius coordinatas  $x$  et  $y$ : Opus autem est tantum aequatione differentiali, propterea ponamus relationem elementorum  $dx$  et  $dy$  dari hac aequatione  $Pdx=Qdy$ , seu  $dx:dy=Q:P$ . Positis nunc his valoribus proportionalibus loco  $dx$  et  $dy$ , prodibit aequatio  $\frac{(x-b)Q+(y-c)P}{\sqrt{a^2 + (x-b)^2 + (y-c)^2}} = \frac{(f-x)Q+(g-y)P}{\sqrt{a^2 + (f-x)^2 + (g-y)^2}}$  quae vacua est a differentialibus quantitatibus.

15. Consideremus iam lineas  $GM$  et  $MH$  tanquam duo elementa lineae breuissimae in superficie, in qua sumta sunt puncta  $G$  et  $H$  et curua  $IK$ , ducendae. Ponamus  $AC=t$ , suntque iam factae  $CP=x$  et  $PM=y$ . Erit  $BC=CD=a=dt$ ;  $DF=f=x+dx$ ;  $FH=g=y+dy$ ;  $BE=b=x-dx+ddx$ ;  $EG=c=y-dy+ddy$ . Substituantur hi valores pro  $a, b, c, f$  et  $g$  in aequatione supra inuenta, orietur aequatio haec  $\frac{Q(dx-ddx)+P(dy-ddy)}{\sqrt{(dt^2 + (dx-ddx)^2 + (dy-ddy)^2)}} = \frac{Qdx+Pdy}{\sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)}}$

16. Aequatio haec aliud non significat, nisi quod differentiale huius quantitatis  $\frac{Qdx+Pdy}{\sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)}}$

aequale sit faciendum nihilo, positis  $P, Q$  et  $dt$  constantibus ( $dt$  quidem re ipsa constans ponitur.)

Habebitur ergo ex hac differentiatione aequatio haec  $(Qddx + Pddy) \sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)} = (Qdx + Pdy)$

$(dxddx + dyddy):V(dt^2 + dx^2 + dy^2)$ . Quae in ordinem reducta abit in hanc  $\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$ .

17. Introducamus nunc etiam in calculum naturam superficiei; quae aequatione inter tres coordinatas  $t$ ,  $x$  et  $y$  commodissime exprimitur. Quia vero hic tantum utimur aequatione differentiali, fit ea  $Pdx = Qdy + Rdt$ . Ex hac elici debet aequatio pro curua IK, quippe quae in superficie proposita est fita. Aequatio autem pro ea inuenitur si in aequatione superficiei  $t$  ponitur aequalis constanti AC, i. e. Si fit  $dt = 0$ . Proueniet itaque pro curua IK aequatio  $Pdx = Qdy$ , eadem, quae supra erat assumpta. Propter ea autem aequationem  $Pdx = Qdy + Rdt$  assumimus, ut ex ea altera resultaret, atque ne nouis substitutionibus opus esset.

18. Ex his ergo duabus aequationibus in duabus praecedentibus paragr: datis, quarum altera est pro superficie proposita, altera ex natura minimi deducta, inueniri poterit linea breuissima in superficie ducenda. Ad hoc coniungi debent duae illae aequationes ex iisque noua confici, quae tantum duas indeterminatas inuoluit. Haecque noua aequatio determinabit projectionem quampiam lineae breuissimae in aliquo plano, quod ex coordinatis binis remanentibus cognoscetur. Linea itaque breuissima quaesita elicienda est ex his duabus aequationibus  $Pdx = Qdy + Rdt$ , et  $\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$ .

19. Generalem hanc solutionem ad tria praecipua formarum superficierum genera accommodabimus



bimus: quae sunt cylindrica, conica et rotunda seu tornata. Ad genus cylindricum non tantum refero cylindros communes bases circulares habentes, sed omnia corpora, quorum sectiones ad axem perpendiculares sunt inter se aequales et similes. Huiusmodi cylinder fit BHCFGD, cuius axis est linea AE. In hoc si ponatur abscissa in axe  $AQ=t$ , huicque perpendicularis quaecunque in plano horizontali BCFD sumpta  $QP=x$  et verticalis PM ad superficiem pertingens  $=y$ . Oportet ut cuicunque constanti aequali facta  $t$  semper eadem prodeat aequatio inter  $x$  et  $y$ . Fig. 3.

20. Aequatio igitur pro huiusmodi superficiebus erit  $Pdx=Qdy$ , in qua P et Q non inuoluunt litteram  $t$ . Si enim vel adesset tertius terminus  $Rdt$  vel P et Q a  $t$  penderent aequationes pro variis sectionibus ad axem perpendicularibus variae prodirent, quod esset contra naturam corporum cylindricorum. Eadem igitur aequatio  $Pdx=Qdy$  exprimet naturam basis BHC. Facta enim in basi hac  $AP=x$  et  $PM=y$ , aequatio pro hac basi erit etiam  $Pdx=Qdy$ . Pro cylindris igitur communibus, in quibus BHC est circulus, si A fuerit eius centrum erit  $x dx = -y dy$ .

21. Ad lineam nunc breuissimam in superficiebus cylindricis determinandam loco aequationis generalis  $Pdx=Qdy+Rdt$  hac uti debemus  $Pdx=Qdy$ , seu  $P:Q=dy:dx$ . His igitur proportionalibus loco P et Q in aequatione  $\frac{Qddx+\frac{Pddy}{Pdy}}{Qdx+\frac{Pddy}{Pdy}}=\frac{dxddx+dyddy}{\frac{dt^2+dx^2+dy^2}{2}}$ , substitutis prodibit haec  $\frac{dxddx+dyddy}{\frac{dx^2+dy^2}{2}}=\frac{dxddx+dyddy}{\frac{dt^2+dx^2+dy^2}{2}}$ , quae integrata dat  $\sqrt{(dx^2+dy^2)}=m\sqrt{(dt^2+dx^2+dy^2)}$ ,  
P 3 cui

cui aequiualeat haec  $dx^2 + dy^2 = n^2 dt^2$ . Consequenter est  $nt = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} + C$ ; seu  $t$  semper est proportionalis arcui in respondente sectione transuersa a linea breuissima abscissi, constante quapiam aucti vel minuti.

22. Sumamus loco aequationis  $dx^2 + dy^2 = n^2 dt^2$  hanc  $dx^2 + dy^2 + dt^2 = n^2 dt^2$ , licet enim pro  $n$  numerum quemlibet substituere, erit  $nt = \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dt^2}$ . Ex quo intelligitur longitudinem lineae breuissimae esse vbique, vt respondentem abscissam in axe  $t$ . Ex superiore aequatione autem  $nt = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} + \text{const.}$  concluditur, si  $n=0$  fore arcus in sectionibus transuersis a linea breuissima abscissos omnes aequales, et propterea lineam breuissimam esse rectam in superficie ductam et axi parallelam. Porro est etiam  $\int \sqrt{dx^2 + dy^2} + \text{const.} = n \int \sqrt{dx^2 + dy^2 + dt^2}$ ; in qua si  $n=1$ , erit linea breuissima ipse perimenter sectionis transuersae.

23. Sit, transuersa cylindri sectio circulus axisque per centrum transeat, erit  $x dx = -y dy$  seu  $xx + yy = aa$ ; cum hac coniungatur aequatio  $nt + b = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$  seu differentialis tantum  $n^2 dt^2 = dx^2 + dy^2$ . Ex his aequationibus deriuetur noua  $y$  carens, quae projectionem lineae breuissimae in plano horizontali determinabit. Prodibit autem  $ndt = \frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$  seu  $nt = \int \frac{adx}{\sqrt{(aa-xx)}}$ . Quae dat hanc constructionem: sumta  $AQ = t$  abscindatur in basi arcus  $HM = nt$ , eiusque sinus  $AP$  erit aequalis applicatae  $QP$  et punctum  $P$  in projectione, quae igitur est linea sinuum.

24. Corpora conoidica hic mihi denotant solidida

lida lineis rectis ex curvae cuiuslibet singulis punctis ad punctum fixum extra planum curvae assumptum ductis terminata. Haec in conos ordinarios abeunt si curvae illae fuerint sectiones conicae. Huiusmodi corpus conoidicum sit  $ACFDA$ , eius axis  $AQB$ , et planum horizontale  $ACD$ . Ponamus basem  $CBDE$  esse perpendicularem ad axem  $AB$ . Manifestum nunc est, omnes sectiones axi perpendiculares fore singulas similes, et proportionales quadratis distantiarum a vertice  $A$ . Vocentur ut ante  $AQ, t$ ;  $QP, x$  et  $PM, y$ . Fig. 4.

25. Quia omnes sectiones transversae sunt similes, aequatio inter  $t, x$  et  $y$  talis esse debet, ut auctis vel minutis duabus harum coordinatarum tertia eadem ratione augeatur vel minuatur. Siue si in aequatione ponatur loco  $t, x$  et  $y$  hae  $nt, nx$ , et  $ny$ , ut aequatio immutata persistat. Haec vero est proprietas aequationum homogenearum, in quibus  $t, x$ , et  $y$  ubique eundem dimensionum numerum constituunt. In his enim facta substitutione memorata in omnibus terminis  $n$  eandem habebit potestatem, et propterea ea diuisione tolli poterit, et aequatio prior prodibit.

26. Hanc ergo corpora conoidica habent proprietatem, ut aequatio eorum inter  $t, x$  et  $y$  facta sit homogenea, i. e. ut in singulis eius terminis idem sit dimensionum numerus ab indeterminatis  $t, x$  et  $y$  formatus. Si igitur ex hac aequatione quaeratur quid sit  $t$ , reperietur  $t$  aequalis functioni ex  $x$  et  $y$  compositae homogeneae et vnius dimensionis. Quamobrem  $\frac{t}{x}$  aequabitur functioni ex  $x$   
et

$y$  compositae etiam homogeneae et nullius dimensionis.

27. Vocetur haec functio  $F$ ; erit  $\frac{t}{x} = F$ . Differentiale vero huius functionis  $F$  habebit hanc formam  $Mdx + Ndy$ . In qua litterae  $M$  et  $N$  hanc habebunt inter se relationem, ut sit  $Mx + Ny = 0$ . Nam ponatur in functione  $Fy = qx$ , mutabitur ea, quia est homogenea et nullius dimensionis, in aliam, in qua tantum littera  $q$  occurret, neque  $x$  neque  $y$  amplius in ea reperietur. Propterea eius differentiale habebit hanc formam  $Ldq$ . Est vero  $Ldq = \frac{Ldy}{y} - \frac{Lydx}{xx} = Mdx + Ndy$ . Erit igitur  $M = -\frac{Ly}{xx}$  et  $N = \frac{L}{x}$ . Ex quo apparet fore  $Mx + Ny = 0$ . Habetur ergo  $N = -\frac{Mx}{y}$  vel  $M = -\frac{Ny}{x}$ .

28. Quia est  $\frac{t}{x} = F$ ; erit  $\frac{xdt - tdx}{xx} = dF = Mdx + Ndy = -\frac{Nydx}{x} + Ndy$ . Ex hac prodibit ista aequatio  $t dx - Nxy dx = -Nxx dy + xdt$  quae comparata cum generali  $Pdx = Qdy + Rdt$  dabit  $P = t - Nxy$ ;  $Q = -Nxx$ ; et  $R = x$ . Ex aequationibus vero duabus  $t dx - Nxy dx = -Nxx dy + xdt$  et  $Mx + Ny = 0$ , inuenitur  $N = \frac{xdt - tdx}{xxdy - xydx}$  et  $M = \frac{yxd t - tydx}{x^3 dy - xydx}$ . Erit igitur  $P = \frac{txdy - xydt}{x^2 dy - ydx}$  et  $Q = \frac{yxd t - tydx}{x^2 dy - ydx}$ . Factis his substitutionibus in aequatione generali  $\frac{Qddx + Pddy}{Qdx + Pdy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$  inuenietur haec aequatio  $\frac{yxdtdx - tydx dx - txdyddy + xydtddy}{yxdtdx - tydx^2 + txdy^2 - xydt dy} = \frac{dxddx + dyddy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}$ .

29. Ad hanc aequationem reducendam pono  $tt + xx + yy = zz$ , et  $dt^2 + dx^2 + dy^2 = ds^2$ ; erit  $xdx$

$x dx + y dy = z dz - t dt$ , et  $dx^2 + dy^2 = ds^2 - dt^2$ . Porro  $dx ddx + dy ddy = ds dds$ , et  $y ddy + x ddx = z ddz + dz^2 - ds^2$ . Ope horum valorum peruenitur ad hanc æ-

quationem  $\frac{z dt ddx + dt dz^2 - dt ds^2 - t ds dds - ds}{ds^2} = \frac{z dz dt - t ds}{ds^2}$ . Ex hac e-

rit  $\frac{z ds ddx + dz ds - z dz dds}{ds^2} = ds$ . Quae integrata dat  $\frac{z dx}{ds}$

$= s$  haecque iterum integrata hanc  $ss = zz + C = tt + xx + yy + C$ . Erit igitur longitudo lineae breuissimae  $s = \sqrt{(tt + xx + yy + C)}$ . Et ex hac proprietate in quolibet casu particulari determinabitur linea breuissima quaesita. Pro cono recto, in quo omnes sectiones transversae sunt circuli, est  $yy + xx = nntt$ . Erit ergo  $s = \sqrt{(nm + 1)tt + C}$ .

30. Haec quae hactenus de linea breuissima ducenda in superficiebus cylindricis tradidimus, alia methodo facilius inueniuntur ex ea horum corporum proprietate, quod eorum superficies euolutione in planas transmutentur. Quae igitur linea in his planis est breuissima, erit etiam in ipsiis superficiebus cylindricis et conicis breuissima. Quare linea breuissima in huius modi superficiebus hanc habere debet proprietatem, vt superficiebus euolutis et in planas transmutatis linea breuissima transmutetur in rectam.

31. Haec vero methodus latius non patet, neque ad alias superficies, quae non possunt euolutione in planas mutari, potest accommodari. Pro talibus vero methodus hac dissertatione exposita aequae ac pro illis valet. Vtatur igitur hac methodo in superficiebus corporum rotundorum seu tornato-

rum, quae generantur circumrotatione cuiusque figurae circa axem immobilem; quemadmodum sphaera generatur conuersione semicirculi circa diametrum; conus rectus trianguli conuersione circa alterutrum latus; cylinder rectus conuersione parallelogrammi circa latus.

Fig. 5.

32. Sit huiusmodi corpus rotundum ABMC generatum conuersione curuae AQC circa axem AQ. In eo fit BMC sectio transuersa, quae erit circulus, cuius centrum in Q. Vocentur vt ante BQ,  $t$ ; QP,  $x$  et PM,  $y$ . Aequatio inter has coordinatas hanc debet habere proprietatem, vt posito  $t$  constante seu  $dt=0$ , ea abeat in aequationem circuli  $xx+yy=Const.$  seu  $x dy = -y dx$ . Quamobrem aequatio pro solidis rotundis est  $xx+yy=T$  vbi  $T$  denotat functionem quamcunque ipsius  $t$  et constantium. Haec igitur differentiata dat  $x dx = -y dy + R dt$ , in qua  $RQ$  solis  $t$  et constantibus pendet.

33. Hac aequatione in generali §. 10.  $\frac{Q dx + P dy}{Q dx + P dy}$  substitutis orietur aequatio ista 
$$\frac{\frac{dx dx + dy dy}{2}}{\frac{dx dy - y dx}{x dy - y dx} - \frac{dx dx + dy dy}{dt^2 + dx^2 + dy^2}}$$
 Cuius integralis aequatio est  $l(x dy - y dx) = lV(dt^2 + dx^2 + dy^2) + la$ , vel  $x dy - y dx = aV(dt^2 + dx^2 + dy^2)$ . Haec si coniungatur cum aequatione naturam superficiei exprimente  $x dx = -y dy + R dt$  determinabit lineam breuissimam.

34. Litera  $a$  est arbitraria seu pendet a loco punctorum per quae linea breuissima transire debet. Si ponatur  $a=0$ ; erit  $x dy = y dx$  atque  $y=nx$ . Vnde cognoscitur peripheriam curuae circa axem rotatae in

in quolibet situ repraesentare lineam breuissimam inter suos terminos. Hic ergo casus valet, si duo puncta inter quae linea breuissima duci debet, sunt cum axe in eodem plano. Ex hisce apparet in sphaera lineam breuissimam semper esse circulum maximum: quia sphaera conuersione circuli circa diametrum generatur, et sibi vbique est aequalis et similis.

35. Ad aequationem tractabiliorem efficiendam pono  $xx + yy = zz$ , et  $dx^2 + dy^2 = ds^2$ ; erit  $x dx + y dy = z dz$ . Ex his apparet fore  $zz ds^2 - zz dz^2 = (x dy - y dx)^2$ . Quare cum sit  $x dy - y dx = a \sqrt{(dt^2 + dx^2 + dy^2)}$ , erit  $z^2 ds^2 - zz dz^2 = aadt^2 + aads^2$  atque  $ds = \sqrt{\frac{zz dz^2 - aadt^2}{zz - aa}}$ . Si ulterius ponatur elementum ipsius lineae breuissimae  $= dv$ , erit  $dv = \sqrt{(ds^2 + dt^2)} = z \sqrt{\left(\frac{dz^2}{zz - aa} + \frac{dt^2}{zz - aa}\right)}$ . Et si hic duae variables  $z$  et  $t$  occurrere videntur, tamen in quolibet casu ex aequatione pro superficie determinabitur  $t$  in  $z$ , et longitudo lineae breuissimae saltem per quadraturas cognoscetur.

36. Haec sunt tria praecipua corporum genera in quorum superficiebus lineas breuissimas delineandi methodus hic fusius est tradita. Habent hi casus hanc prae aliis proprietatem, ut generalis aequatio ad hos accommodata reduci possit ad differentialem primi gradus. Ex his vero alii se produnt casus similiter integrationem admittentes. Ut pro corporibus cylindricis aequatio est  $P dx = Q dy$ . In qua  $P$  et  $Q$  ab  $x$  et  $y$  pendere dicta sunt. Perspicuum autem est reductionem aequae succedere, si  $P$  et  $Q$  etiam

$Q^2$

iam

iam a  $t$  penderent, quo in casu aequatio non est amplius pro corporibus cylindricis. Simili modo in aequatione pro corporibus rotundis  $x dx = y dy + R dt$ ,  $R$  tantum a  $t$  pendet. Si igitur  $R$  etiam  $x$  et  $y$  in se comprehendat, aequatio erit pro nouo superficierum genere, et nihilominus reductionem admittit,

Proposuit mihi hanc quaestionem Cel. Ioh. Bernoulli, postquam ipsi hanc meam solutionem scripsissem, ut nimirum praeter tria exposita superficierum genera alia inuestigare, quae etiam ad aequationes integrabiles perducant. Solutionem igitur huius quaestionis, quia tam facile ex antecedentibus fluit, hic adiungere volui.

---

NOVA METHODVS  
INNUMERABILES AEQVATIONES DIFFERENTIALIALES SECUNDI GRADVS REDCENDI AD AEQVATIONES DIFFERENTIALIALES PRIMI GRADVS.

*Auctore*  
Leonh. Eulero.

I.

M. Sept.  
1728.

**Q**Vando ad aequationes differentiales secundi vel altioris cuiuspiam gradus perueniunt analytiae, in iis resoluendis duplici modo versantur. Primo inquirunt, an in promptu sit eas integrare: id si fuerit, obtinuerunt



